ÜBER
DEN ARBEITSWERT EINER LUFTDRUCKVERTHEILUNG UND
ÜBER
DIE ERHALTUNG DER DRUCKUNTERSCHIEDE

VON

MAX MARGULES.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 11. JULI 1901.

Einige kleine Aufgaben, die mit dem Problem der Cyklonen zusammenhängen, sind hier als Beitrag zu einer Festschrift der k. k. Centralanstalt für Meteorologie vereinigt.

Im ersten Theil wird die Arbeit berechnet, die man aufzuwenden hat, um Luft aus dem Zustand des Gleichgewichtes in eine vorgeschriebene andere Massenvertheilung zu bringen. Sie ist in einem geschlossenen atmosphärischen System als potentielle Energie anzusehen. Die Vergleichung der kinetischen Energie einfacher Wirbel mit der potentiellen lehrt, dass jene weitaus größer ist.

Dem zweiten Abschnitt ist das bekannte Circulationsschema für Luftsäulen ungleicher Temperatur zugrunde gelegt. Die Berechnung der zur Erhaltung horizontaler Druckunterschiede nöthigen Wärmezufuhr und des Nutzeffectes war noch auszuführen.

Am Schluss findet man eine Überschlagsrechnung über den Energieverlust bewegter Luft. Die innere Reibung kann auf geordnete große Strömungen nur verschwindenden Einfluss haben. Auch die verworrenen kleinen Bewegungen die in den großen Luftströmen verlaufen, verzehren wohl von der lebendigen Kraft des Windes weniger, als die unterste Schicht zur Erregung und Erhaltung der Meereswellen oder zur Erschütterung der aus dem Festland aufragenden Körper abgibt.

I. Arbeitswert einer Druckvertheilung.

1. Luft, auf die keine äußeren Kräfte wirken, in einem begrenzten Volumen k. Anfangszustand constante Dichte μ_0, constanter Druck p_0. Endzustand μ, p, während des Übergangs $\mu_t\, p_t$.

Bei einer kleinen Zustandänderung leistet das Massenelement δm die Ausdehnungsarbeit

$$\delta m\; p_t\, d\left(\frac{1}{\mu_t}\right) = -\delta m \,.\, \frac{p_t}{\mu_t^2}\, d\mu_t,$$

von Anfang bis zu Ende die Arbeit

$$\delta a = -\delta m \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{p_t}{\mu_t^2}\, d\mu_t.$$

Die Luftmasse, die auf die Dichte μ gebracht wird, ist die im Volumelement dk enthaltene μdk, demnach die von der ganzen Masse geleistete Ausdehnungsarbeit

$$a = -\int \mu dk \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{p_t}{\mu_t^2} d\mu_t.$$

Wenn eine vom Weg des Lufttheilchens unabhängige Beziehung zwischen Druck und Dichte besteht, wenn beispielsweise festgesetzt ist, dass der Übergang bei constanter Temperatur, oder dass er ohne Wärmezufuhr und ohne Wärmeaustausch stattfinden soll, dann ist der Wert von a durch den Anfangs- und Endzustand bestimmt.

Bei der Druckvertheilung p hat das Gas einen Arbeitsvorath A, der dem a entgegengesetzt gleich ist. Aus den aërodynamischen Gleichungen wird nachzuweisen sein, dass er die potentielle Energie der Druckkräfte bei der gegebenen Massenvertheilung μ darstellt.

$$A = \int \mu dk \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{p_t}{\mu_t^2} d\mu_t. \tag{I}$$

a. Isotherme Druckänderung.

Wird in der Gleichung

$$p = RT\mu \quad [R \text{ Gasconstante, } T \text{ absolute Temperatur}]$$

T constant gesetzt und benützt man die Beziehung

$$\int \mu dk = \int \mu_0 dk,$$

so folgt

$$A = RT\int dk \mu \lg\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) = \int dk p \lg\left(\frac{p}{p_0}\right). \tag{Ia}$$

b. Adiabatische Druckänderung

Für diesen Fall hat man

$\frac{p_t}{p_0} = \left(\frac{\mu_t}{\mu_0}\right)^\gamma$ . . . . . [γ das Verhältnis der specifischen Wärme des Gases bei constantem Druck zu derjenigen bei constantem Volumen]

$$A = \frac{1}{\gamma - 1} \int \left(p - p_0 \frac{\mu}{\mu_0}\right) dk$$

und mit der Beziehung, welche ausdrückt, dass die Luftmasse in k ungeändert bleibt

$$A = \frac{1}{\gamma - 1} \int (p - p_0)\, dk. \tag{Ib.}$$

Rechnung für den Fall relativ kleiner Druckänderungen.

Die Ausdrücke (I*a*) (I*b*) lassen die Deutung zu, dass die Volumelemente, in denen Druck und Dichte über dem Mittelwert sind, einen positiven Beitrag zum Integral geben, die unter dem Mittel einen negativen. Das ist aber nicht richtig.

Setzt man

$$\mu = \mu_0(1+\sigma), \qquad p = p_0(1+\varepsilon),$$

so ist bei isothermer Änderung (*a*) $\varepsilon = \sigma$

bei adiabatischer Änderung (*b*) $\varepsilon = \gamma\sigma + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2!}\sigma^2 + \ldots$

und stets

$$\int \sigma \, dk = 0.$$

Man erhält demnach

isotherm (I a^*) $$A = p_0 \int dk \left(\frac{\sigma^2}{1.2} - \frac{\sigma^3}{2.3} + \frac{\sigma^4}{3.4} - \ldots \right) = p_0 \int dk \left(\frac{\varepsilon^2}{2} - \ldots \right),$$

adiabatisch (I b^*) $$A = \gamma p_0 \int dk \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{2-\gamma}{2.3} \sigma^3 + \frac{(2-\gamma)(3-\gamma)}{2.3.4} \cdot \sigma^4 - \ldots \right) = \frac{p_0}{\gamma} \cdot \int dk \left(\frac{\varepsilon^2}{2} - \ldots \right).$$

Diese Formen zeigen, wie schon die ursprüngliche (I), dass der Beitrag jedes Volumelementes, dessen Dichte vom Mittelwert abweicht, positiv ist; derjenige eines Volumens im Niederdruckgebiet wird sogar etwas größer als eines gleichen Volums im Hochdruckgebiet mit demselben Absolutwert von σ.

Bei sehr kleinen Druckänderungen genügt das erste Glied der Entwicklung. Es ist zuerst von Lord Rayleigh angegeben worden [Theorie des Schalles (Braunschweig 1880) II 22]. Die potentielle Energie der Druckvertheilung ist dann mit gleichen σ-Werten γmal größer bei adiabatischen Bedingungen als bei isothermen; dagegen mit gleichen ε-Werten im Verhältnis $1/\gamma$ kleiner.

Arbeitsvorrath eines sehr großen Gasvolumens, worin nur ein kleiner Theil gestört ist.

Bezeichnet man jetzt mit k das Volumen, auf das sich die Störung des Gleichgewichtes erstreckt, den übrigen weitaus größeren Theil, dessen Dichte durch Massenzufuhr aus k nicht merklich geändert wird, mit k', führt die Zeichen σ, σ' für die relative Dichteänderung in k und k' ein, so gilt

$$\int \sigma \, dk + \int \sigma' dk' = 0$$

und

$$\operatorname{Lim} \int \sigma'^2 dk' = 0.$$

Die letzte Gleichung und ähnliche für die höheren Potenzen von σ' gelten für den Grenzfall eines unendlichen Gasvolumens.

Demnach bleiben die Ausdrücke (I a^*) (I b^*) ungeändert, wenn man die Integrale nur auf den gestörten Theil ausdehnt.

Um auch Ausdrücke in geschlossener Form zu bilden, bemerkt man, dass der Antheil des Volumens k' an der potentiellen Energie gegeben ist

für isotherme Bedingungen durch

$$A' = \operatorname{Lim} RT \int dk' \mu' \lg \left(\frac{\mu'}{\mu_0} \right) = RT \mu_0 \int \sigma' dk = -RT \int (\mu - \mu_0) \, dk,$$

für adiabatische Bedingungen durch

$$A' = \frac{1}{\gamma - 1} \int (p' - p_0) \, dk = -\frac{p_0 \gamma}{\gamma - 1} \int \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \, dk.$$

Bezeichnet wieder A die potentielle Energie der ganzen Gasmasse, so hat man:

isotherm (I a') $$A = RT \int dk \left(\mu \lg \frac{\mu}{\mu_0} + \mu_0 - \mu \right) = \int dk \left(p \lg \frac{p}{p_0} + p_0 - p \right),$$

adiabatisch (I b') $$A = \frac{p_0}{\gamma - 1} \int \left[\frac{p}{p_0} - 1 - \gamma \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \right] dk.$$

Die Integrale sind über den gestörten Theil zu erstrecken (oder auch über das ganze Volumen; denn die Glieder welche zu den früheren Ausdrücken hinzukommen, geben über $k + k'$ keinen Beitrag zum Resultat).

2. Atmosphäre.

Wenn äußere Kräfte auf die Luft wirken, so ist der Druck im Gleichgewichtszustand örtlich verschieden. Bei Störungen kommt außer der potentiellen Energie der geänderten Druckvertheilung noch diejenige der Kräfte in Betracht. In manchen Fällen kann man doch die oben abgeleiteten Ausdrücke leicht anwenden.

Als Atmosphäre wird eine Luftmasse bezeichnet, auf welche die Schwerkraft wirkt. Der Kürze wegen ist die Beschleunigung der Schwerkraft g constant angenommen, die Unterlage eben, die Anfangstemperatur als Function der Höhe allein. Theilt man diese Atmosphäre in Höhenschichten von unendlich geringer Dicke dz, so kann man unter einfachen Voraussetzungen für jede Schichte die Rechnung mit den Formeln ausführen, die für eine Gasmasse von constanter Anfangsdichte gelten.

Ist nur in einem relativ kleinen Theil der Zustand gestört, so wird angenommen, dass die in jeder Schicht dieses Cylinders überschüssige oder fehlende Gasmasse aus dem ungestörten Theil derselben Schicht hergekommen oder dahin abgeflossen ist; das Potential der Schwerkraft bleibt ungeändert. Die potentielle Energie der Druckvertheilung ist durch (I) oder die daraus abgeleiteten Formeln gegeben. Das Volumelement dk wird durch das Product des Flächenelementes dS und der Höhe dz ersetzt.

Wenn man annimmt, dass das Gleichgewicht nur in horizontaler Richtung gestört ist, dagegen vertical Gleichgewicht bestehen bleibt und die hypsometrische Formel gilt, so lässt sich die Integration nach der Höhe leicht ausführen.

Für isotherme Bedingungen ist der Arbeitsvorrath einer Schichte nach (Ia')

$$dA = dz\int\left(p\lg\left(\frac{p}{p_0}\right)+p_0-p\right)dS$$

das Integral über eine Fläche erstreckt, welche den gestörten Theil einschließt. Setzt man die Temperatur der Atmosphäre constant, bezeichnet mit P den Druck am Boden im Flächenelement dS, so ist

$$p = Pe^{-\frac{gz}{RT}}$$

$$A = \int_0^\infty e^{-\frac{gz}{RT}}dz\,.\int\left(P\lg\frac{P}{P_0}+P_0-P\right)dS.$$

Das Integral nach z ist die sogenannte Höhe der homogenen Atmosphäre von der Temperatur T. Nimmt man T als Function der Höhe an, so ändert sich im Ausdruck A nichts, als dass im Wert jenes Integrals RT/g das T eine mittlere Temperatur der Höhenschichten bedeutet.

Führt man ferner ein

$$P = P_0(1+\varepsilon),$$

so hat man eine für die Ausrechnung bequemere Form

$$\text{(II}a.) \qquad A = \frac{RT}{g}P_0\int dS\left(\frac{\varepsilon^2}{1.2}-\frac{\varepsilon^3}{2.3}+\frac{\varepsilon^4}{3.4}-\ldots\right)$$

Die potentielle Energie der angenommenen Druckvertheilung in der Atmosphäre ist demnach gleich derjenigen in einer Luftschicht, auf die keine äußeren Kräfte wirken, deren Höhe RT/g, und worin die Druckvertheilung in allen Höhenlagen gleich ist derjenigen am Boden der Atmosphäre.

Wenn M die Masse über der Fläche S im ungestörten Zustand bezeichnet, $[\varepsilon^2]$ den Mittelwert von ε^2 in S, wenn ferner das erste Glied der Reihe gegen die übrigen sehr groß ist, hat man den Nährungswert

$$A = MRT.\frac{[\varepsilon^2]}{2}.$$

Das folgende Beispiel soll zu einer beiläufigen Schätzung der potentiellen Energie der Druckvertheilung in einer Cyklone dienen.

Die Fläche gestörten Druckes wird als Kreis vom Radius ρ angenommen, der Druck im Centrum am Boden $P_0\,(1-c)$, von da gegen den Rand linear ansteigend

$$\varepsilon = -c\left(1-\frac{r}{\rho}\right).$$

In (IIa) hat man für das Flächenelement dS zu setzen $2\pi r dr$ und benützt

$$\int_0^\rho \left(1-\frac{r}{\rho}\right)^n r dr = \frac{\rho^2}{(n+1)(n+2)},$$

erhält demnach für den speciellen Fall

$$\frac{A}{\pi\rho^2} = \frac{RT}{g}\,.\,P_0\,.\,\frac{2c^2}{4!}\left(1+\frac{1!\,4!}{5!}c+\frac{2!\,4!}{6!}c^2+\ldots\right)$$

als Mittelwert der potentiellen Energie des Systems für die Einheit der horizontalen Fläche.

Ist der Barometerstand im Centrum am Boden 745 mm, im ungestörten Gebiet 760, so hat man $c = {}^{15}/_{760}$, ferner $P_0 = 10333.9 \cdot 806$ ($kg.m^{-1}.\,sec^{-2}$), für die Temperatur 0° C. RT/g nahe gleich 8000 m

$$\frac{A}{\pi\rho^2} = 26210\,kg\ \text{sec}^{-2} = 6\cdot 3\ \text{Kilogrammcalorien}\ m^{-2}.$$

Nimmt man 5 Äquatorgrade (=555500 m) als Halbmesser der Cyklone, so ist die ganze zur Luftverdünnung aufzuwendende Arbeit $6\cdot 1\,.\,10^{12}$ Calorien. Anders ausgedrückt, erscheint diese Arbeit nicht sehr groß; mit dem äquivalenten Wärmebetrag könnte man die Temperatur des Cyklonenraumes bei constantem Druck nur um 0°0026 erhöhen, beiläufig um den vierhundertsten Theil eines Grades.

Mit der angenommenen Form ε und den Werten von c, ρ hat man einen constanten Druckgradienten von 3 mm Hg am Boden. Der Mittelwert $A/\pi\rho^2$ ist unabhängig von ρ nahe proportional dem Quadrat der Differenz zwischen dem normalen Druck und dem im Centrum der Cyklone. Einem Barometerstand von 730 mm im Centrum würde das vierfache des oben berechneten $A/\pi\rho^2$ zukommen.

Definiert man die mittlere Temperatur $[T]$ der Schichten durch die Gleichung

$$\frac{R[T]}{g} = \int_0^\infty dz\,.\,e^{-\int_0^z \frac{g}{RT}dz},$$

so erhält man für adiabatische Bedingungen in der Atmosphäre

$$\text{(II}b.) \qquad A = \frac{1}{\gamma}\,\frac{R[T]}{g}\,P_0 \int\left(\frac{\varepsilon^2}{2}+\ldots\right)dS = \gamma\,\frac{R[T]}{g}\,P_0\,.\int\left(\frac{\sigma^2}{2}+\ldots\right)dS.$$

Beschränkt man sich auf das erste Glied der Reihe, so gilt für gleiches $[T]$ auch in der Atmosphäre, dass bei adiabatischer Zustandsänderung A mit gleichen σ-Werten γmal größer ist als bei isothermer, mit gleichen ε-Werten im Verhältnis $^1/_\gamma$ kleiner.

3. Eine Druckvertheilung der oben beschriebenen Art soll in der Atmosphäre durch einen stationären Wirbel erzeugt sein; man will das Verhältnis zwischen lebendiger Kraft der bewegten Masse und der potentiellen Energie der Druckunterschiede kennen.

Die Lufttheilchen kreisen um die verticale Axe des Cylinders vom Radius ρ; die hypsometrische Formel gilt wie oben. Eine solche Bewegung ist in reibungsloser Luft möglich, das heißt, die Annahmen sind mit den aërodynamischen Gleichungen verträglich, wenn die Geschwindigkeit nach der Höhe constant ist.

Wirbel in einer ruhenden Atmosphäre.

Für die Druckänderung in horizontaler Richtung hat man die Beziehung

$$(\alpha) \qquad \frac{G^2}{r} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} \qquad [G \text{ Geschwindigkeit, } r \text{ Radius der Kreisbahn}]$$

und für die kinetische Energie des Wirbels

$$K = \int_0^\infty dz \int_0^\rho \frac{\mu G^2}{2} 2\pi r\, dr = \pi \int_0^\infty dz \int_0^\rho \frac{\partial p}{\partial r} r^2 dr = \pi \frac{RT}{g} . P_0 \int_0^\rho \frac{d\varepsilon}{dr} r^2 dr,$$

bei ähnlicher Bezeichnung wie zuvor. Auch die Annahme eines im Vergleich mit dem Wirbelraum sehr großen Luftvolumens und ungeänderten Druckes für $r \gtreqless \rho$ wird beibehalten. Danach erhält man durch partielle Integration

$$K = -2\pi \frac{RT}{g} P_0 \int_0^\rho \varepsilon r\, dr.$$

Nur negative ε sind möglich.

Mit dem im Beispiel oben verwendeten ε

$$K = \pi \rho^2 P_0 \frac{RT}{g} \cdot \frac{c}{3}.$$

Ist M die Luftmasse im Cylinder vom Radius ρ bei normalem Druck und der Temperatur T, so hat man für die kinetische Energie des Wirbels und die potentielle Energie der durch ihn bedingten Druckvertheilung

$$K = M.RT.\frac{c}{3},$$

$$A = M.RT.\frac{c^2}{12}.$$

Mit $c = {}^{15}/_{760}$ ist K zweihundertmal größer, mit $c = {}^{30}/_{760}$ noch hundertmal größer als A.

Wirbel auf einem rotierenden Horizont.

Für die relativen Bewegungen über einer kleinen Fläche auf der Erde vereinfacht man die Gleichungen durch Annahme eines constanten Polabstandes und erreicht damit eine für gewisse Fälle ausreichende Annäherung an die irdischen Bedingungen. Die Unterlage der Atmosphäre wird als rotierende Ebene angesehen; damit der Luftdruck im Zustand relativer Ruhe Function der Höhe allein sei, muss man auch eine zur Rotationsaxe gerichtete Kraft entgegengesetzt gleich der Centrifugalkraft, annehmen. Der Fußpunkt dieser Axe bleibt dann willkürlich.

Die Druckvertheilung in einem stationären cylindrischen Wirbel mit verticaler Axe ist nun bestimmt durch

$$(\beta) \qquad \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \nu} = \frac{G^2}{r} + jG.$$

G bezeichnet die Geschwindigkeit der Luft relativ zur rotierenden Erde und ist positiv zu nehmen, wenn die Rotationsrichtung im Wirbel mit derjenigen der Erde übereinstimmt.

$$j = 2\nu \sin \varphi$$

ν Rotationsgeschwindigkeit der Erde, φ geographische Breite des Ortes.

Die potentielle Energie der Druckvertheilung wird durch die Rotation nicht geändert. Die kinetische Energie der relativen Bewegung ist aber (mit positivem G) kleiner als sie bei gleichem Druckgefälle mit $j = 0$ wäre. Das Verhältnis K/A wird also auch kleiner.

Ist G/jr sehr groß, so überwiegt in (β) rechts das erste Glied. Für Cyklonen der niedrigen Breiten, deren Ausdehnung gering ist, kann man K/A näherungsweise nach dem oben angeführten Beispiel schätzen. In 15° Breite ist für $r = 100\,km$ $jr = 3\cdot 8\,m/sec$. Wenn G fünfmal größer ist, so kann man vom zweiten Glied absehen. In mittleren Breiten sind im allgemeinen beide Glieder von gleicher Größenordnung.

Setzt man in (β)

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} = RT\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}$$

ein, so hat man für positives G

$$G^2 = RT\left\{r\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - \frac{j^2 r^2}{2RT}\left(\sqrt{1+\frac{4RT}{j^2 r^2}\, r\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}} - 1\right)\right\}.$$

Der kürzeren Rechnung wegen wird hier eine andere Form der Druckvertheilung für das Beispiel gewählt.

$$\varepsilon = -c\left(1-\frac{r^2}{\rho^2}\right) \qquad (\text{für } r \gtreqless \rho).$$

Damit erhält man

$$K = M.RT\frac{c}{2}\left\{1-\frac{j^2 s^2}{4RT}\;\frac{1}{c}\left(\sqrt{1+\frac{8RT}{j^2\rho^2}c} - 1\right)\right\}.$$

Nimmt man

$$\operatorname{Log} j = 6\cdot 01337 - 10, \qquad RT = 287\,.\,273\,.\,m^2\,\sec^{-2}, \qquad c = \frac{30}{760}, \qquad \frac{4RT}{j^2\rho^2}c = 1,$$

das ist einen Wirbel von 1080 km Radius, mit dem Barometerstand 730 mm im Centrum bei 45° Breite, so erhält man

$$K = M.RT.\frac{c}{2}.0\cdot 268.$$

Ohne Rotation hätte man bei sonst gleichen Umständen einen Wirbel, dessen lebendige Kraft

$$\left(K = M.RT\frac{c}{2}\right)$$

anzunehmen, um die gleiche Druckvertheilung zu erhalten.

In beiden Fällen ist mit dem neuen ε die potentielle Energie

$$A = M.RT.\frac{c^2}{6}$$

das Verhältnis A/K im ersten $1/20$ (im zweiten $1/76$).

Obgleich dieser Quotient durch die Wirkung der sogenannten ablenkenden Kraft der Erdrotation beträchtlich vergrößert wird, bleibt doch selbst in Wirbeln der mittleren Breiten die potentielle Energie der Druckvertheilung weitaus kleiner als die lebendige Kraft der relativen Bewegung.

4. Man kann fragen, ob die fortschreitenden Cyklonen besser den einsamen Wellen oder den Wirbeln zu vergleichen sind. Mit den ersten haben sie den theilweisen Austausch der bewegten Masse gemein. Dagegen sind die mit einzelnen Cyklonen auf weite Strecken fortschreitenden Staubregen (zuletzt am 10., 11. März 1901 von Sicilien bis an die Nordsee) ein Beweis dafür, dass ein großer Theil der Luftmasse wie in echten Wirbeln gebunden bleibt.

In Beziehung auf das Verhältnis der kinetischen zur potentiellen Energie sind Cyklonen eher als Wirbel denn als Wellen anzusehen. (In ebenen fortschreitenden Luftwellen ist die Energie zur Hälfte in beide Formen getheilt. Lord Rayleigh, l. c.)

Dies geht aus der folgenden rohen Schätzung hervor. Bezeichnet M die bewegte Luftmasse, $[G^2]$ den Mittelwert des Quadrates der Geschwindigkeit, $[\varepsilon^2]$ den Mittelwert des Quadrates der relativen Druckverminderung, so hat man

$$K = M\frac{[G^2]}{2}, \qquad A = M.RT\frac{[\varepsilon^2]}{2}, \qquad \frac{K}{A} = \frac{G^2}{RT[\varepsilon^2]}$$

$\sqrt{RT}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit isothermer Wellen, die sogenannte Newton'sche Schallgeschwindigkeit ist für 0° C. 280 m/sec.

Für eine Cyklone, worin der größte absolute Wert von ε 3/76 beträgt, kann man den Mittelwert $[\varepsilon^2]$ höchstens zu $3/76^2$ (wie im letzten Beispiel) schätzen, da die kleineren ε die beiweitem größere Fläche bedecken. Damit $K = A$, müsste $[G^2]$ sein $6{\cdot}4^2$; also der Mittelwert der Geschwindigkeit höchstens 6·4 m/sec.

Die Beobachtungen geben schon am Boden größere mittlere Geschwindigkeit mit dem niedrigsten Barometerstand von 730 mm. Ist der Radius der Cyklone 10 Äquatorgrade, der mittlere Gradient 3 mm Hg, so wird die mittlere Windgeschwindigkeit der unteren Luftschicht (beiläufig 20 m über dem Boden) in mittleren Breiten auf 12 m/sec zu schätzen sein, diejenige aller Höhenschichten mindestens zu 18 m/sec und K demnach mindestens 8mal größer als A.

5. Der Ausdruck (1) ist aus der Ausdehnungsarbeit des Gases berechnet und vorläufig als potentielle Energie der Druckvertheilung im geschlossenen Volumen k bezeichnet worden. Ist das richtig, so muss die von den Druckkräften geleistete Arbeit in jedem Zeitelement gleich sein der Änderung von $-A$.

Die Arbeit der Druckkräfte während dt ist für die kleine Masse δm gegeben durch

$$-\frac{\delta m}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial s}G\,dt = -G\frac{\partial p}{\partial s}.dk.dt$$

[ds Bahnelement, G Geschwindigkeit in der Richtung ds] oder durch

$$-\left(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right)dk.dt$$

[u, v, w Geschwindigkeitscomponenten nach den Axen x, y, z].

Es ist nachzuweisen, dass

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \int\left(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right)dk.$$

Setzt man in (1)

$$\int_{\mu_0}\frac{p}{\mu^2}\,d\mu = F(\mu)-F(\mu_0),$$

so wird mit der Gleichung, welche die Constanz der Gasmasse in k feststellt

$$A = \int \mu F(\mu)\, dk - \text{Const.}; \qquad \frac{dF}{d\mu} = \frac{p}{\mu^2}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \int \frac{\partial \mu}{\partial t}\left(F + \frac{p}{\mu}\right) dk.$$

Nimmt man noch die Continuitätsgleichung hinzu

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu w)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \int \frac{p}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t}\, dk - \int F\left(\frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu w)}{\partial z}\right) dk.$$

Das zweite Integral rechts geht durch bekannte Transformation über in

$$-\int \mu\left(u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z}\right) dk - \int \mu F(u \cos Nx + v \cos Ny + w \cos Nz)\, dO$$

[O Oberfläche des Raumes k, N Normale an O einwärts].

Der letzte Theil entfällt, wenn durch O kein Gas eintritt oder austritt.

Mit dieser Bedingung hat man

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \int \frac{p}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial t} + u\frac{\partial \mu}{\partial x} + \cdot + \cdot\right) dk = -\int p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dk$$

$$= \int\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z}\right) dk.$$

Der erste Theil dieser Gleichung sagt, dass $-\partial A/\partial t$ die von allen Massentheilchen in k in der Zeiteinheit geleistete Ausdehnungsarbeit ist, der letzte Theil, dass es die von den Druckkräften in derselben Zeit geleistete Arbeit ist. Im allgemeinen sind diese zwei Arbeiten für jedes einzelne Massenelement verschieden; es war deshalb nothwendig nachzuweisen, dass man von der Ausdehnungsarbeit ausgehend zu einem richtigen Ausdruck der potentiellen Energie der Druckvertheilung gelangt.

Man kann auch auf einem anderen Weg das A ableiten, indem man die Arbeit der Druckkräfte während des Übergangs vom Anfangs- zum Endzustand berechnet. Man kommt zur Form

$$A = \int dk \int_{\mu_0}^{\mu} d\mu \int_{p}^{p} \frac{dp}{\mu},$$

deren Identität mit (I) leicht nachzuweisen ist; beide lassen sich durch partielle Integration, mit der Voraussetzung der Constanz der Gasmasse, überführen in

$$A = \int dk\, \mu \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\mu} - \int dk\,(p - p_0).$$

Die einfachen Voraussetzungen, die der Berechnung von A zugrunde gelegt sind, trifft man in der Atmosphäre nicht. Will man die Luft aus dem Zustand, den man vorfindet, in einen Gleichgewichtszustand übergehen lassen, so wird das auf adiabatischem Wege nicht möglich sein, ohne Luftmassen aus einer Höhenschicht in eine andere zu versetzen. Findet Wärmeaustausch statt, so kann man (den Fall constanter Temperatur ausgenommen) die ganze von den Druckkräften zu leistende Arbeit nicht eindeutig angeben, sie hängt von dem Weg ab, auf dem sich der Übergang vollzieht. Zumeist kommt es auf die zeitlichen Änderungen von A an; diese sind zu berechnen, wenn die Folge der Zustände bekannt ist. Die ganze potentielle Energie lässt sich aber nur unter gewissen Annahmen angeben; eine Schätzung kann man mit den hier berechneten Formeln erreichen.

Anhang.

6. Energiegleichung einer reibungslos bewegten Luftmasse.

Mit den Bezeichnungen des letzten Abschnittes hat man für die Masseneinheit der Luft die Gleichung der lebendigen Kraft

$$G\frac{dG}{dt} = -G\frac{\partial V}{\partial s} - \frac{G}{\mu}\frac{\partial p}{\partial s},$$

V das Potential der äußeren Kraft so gewählt, dass die negative Ableitung nach einer Coordinate die in ihrer Richtung auf die Masse 1 wirkende Kraft darstellt. Ferner ist das Euler'sche Symbol eingeführt

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + G\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z},$$

welches für die zeitliche Änderung der an das Massentheilchen gebundenen Variablen gilt. Wenn V nur eine Function des Ortes ist, geht die Energiegleichung über in

$$\frac{1}{2}\frac{dG^2}{dt} = -\frac{dV}{dt} - \frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t}\right). \tag{III.}$$

Sie gilt auch für die relative Bewegung auf der Erde.

Horizontale Bewegung im stationären Druckfeld.

Wenn die Schwerkraft die einzige äußere Kraft ist und die Druckvertheilung ungeändert bleibt, gilt für horizontale Bewegungen

$$\left(\frac{dV}{dt} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = 0\right) \qquad \frac{1}{2}\frac{dG^2}{dt} = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dt} = -\frac{RT}{p}\frac{dp}{dt}.$$

(a) Mit isothermen Bedingungen hat man

$$\frac{1}{2}(G^2 - G^2) = RT\lg\frac{p_0}{p},$$

wenn $G_0 p_0$ und Gp zusammengehörige Wertpaare sind.

(b) Für Bewegung mit adiabatischer Zustandsänderung

$$c_p\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p}\frac{dp}{dt} = 0.$$

Hier ist anzumerken, dass das zweite Glied mit dem negativen Vorzeichen die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit der Druckkraft auf die Masse 1 im stationären Feld darstellt und für späteren Gebrauch zu notieren, dass die ganze Arbeit bei der Bewegung von p_0 zu p, bezw. von T_0 zu T gleich ist

$$C_p(T_0-T).$$

Das gilt unabhängig davon, ob die Bewegung mit oder ohne Reibung stattfindet. Im Falle reibungsloser Bewegung hat man

$$\frac{1}{2}(G^2-G_0^2) = C_p(T_0-T) = C_p T_0\left(1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R}{C_p}}\right).$$

Wenn p_0-p klein ist gegen p_0, geben (a) und (b) gleicherweise die Näherungsformel für den Zuwachs der lebendigen Kraft der Masseneinheit

$$\frac{1}{2}(G^2-G_0^2) = RT_0\frac{p_0-p}{p_0} = \frac{p_0-p}{\mu_0}.$$

Die folgende kleine Tabelle gibt die Geschwindigkeit an, welche eine Luftmasse erlangt, wenn sie von dem Ruhezustand und dem durch 760 *mm* Hg bezeichneten Druck im stationären Feld horizontal und reibungslos zu einem um 1, 2...30 *mm* niedrigeren Druck gelangt. Sie ist aus der letzten Gleichung mit $RT_0 = 287.273\, m^2 \sec^{-2}$ gerechnet.[1]

$(p_0=760)$ p_0-p...	1,	2,	5,	10,	20,	30	(*mm* Hg)
$(G_0=0)$ G....	14·4,	20·3,	32·1,	45·4,	64·2,	78·6	$\frac{m}{\sec}$.

Aus dieser Tabelle entnimmt man auch, wie weit ein horizontaler Luftstrom im stationären Felde reibungslos dem Gefälle entgegen fließen kann. Ist seine Geschwindigkeit im Anfange 20 *m/sec*, so sinkt sie auf Null sobald der Druck um 2/760 des Anfangdruckes gestiegen ist. Mit dreimal größerer Anfangsgeschwindigkeit, also mit neunfacher lebendiger Kraft, könnte er eine Druckdifferenz von 18 *mm* Hg in der unteren Schicht überwinden.

Horizontale Bewegung im veränderlichen Druckfeld.

$$\frac{1}{2}\frac{dG^2}{dt} = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dt} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Für relativ kleine Druckänderungen

$$\frac{1}{2}(G^2-G_0^2) = RT\frac{p_0-p}{p_0} + \frac{RT}{p_0}\int\frac{\partial p}{\partial t}dt.$$

Wenn die Luftmasse zu Orten niedrigeren Druckes fließt und gleichzeitig der Druck in jedem Ort der Bahn sich mit der Zeit ändert, dann ist die Zunahme der lebendigen Kraft der bewegten Masse nicht mehr von ihrem Anfangs- und Enddruck allein bestimmt. Die Zunahme ist größer als im stationären Feld, wenn der Druck mit der Zeit steigt, kleiner wenn er sinkt.

Angenommen der Barometerstand in der betrachteten Masse fällt während zehn Stunden um 10 *mm*, steigt (oder sinkt) um ebensoviel in der gleichen Zeit im durchlaufenen Feld, dann ist die Zunahme der kinetischen Energie im ersten Fall doppelt so groß als im stationären Feld (im zweiten Fall Null, denn hier brauchte die Luftmasse gar nicht von der Stelle zu kommen).

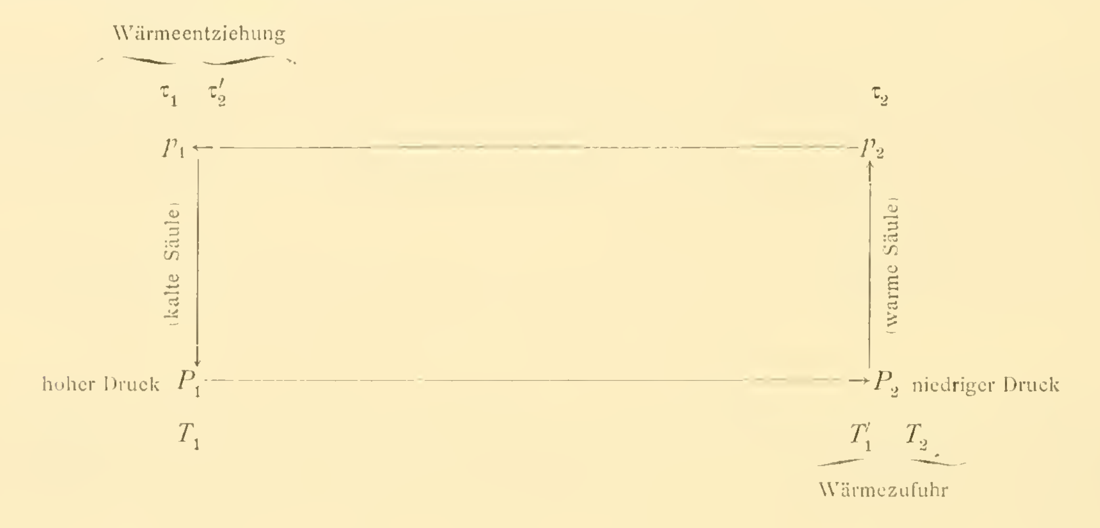
---

[1] Man vergleiche das eben erscheinende Lehrbuch der Meteorologie von Hann S. 416. Dieselben Zahlen sind dort auf anderem Wege abgeleitet.

II. Über die Erhaltung der Druckunterschiede durch Wärmezufuhr.

7. Bei Bewegungen der Luft aus Gebieten höheren in solche niedrigeren Druckes wird von den Druckkräften beständig Arbeit geleistet aus einem angesammelten Vorrath. Die potentielle Energie des Systems müsste sich erschöpfen, die Druckunterschiede im gleichen Niveau würden schwinden, wenn nicht anderswoher Ersatz käme. Bewegungen gegen das Gefälle könnten zwar wieder kinetische Energie in potentielle verwandeln; der Vorgang würde dann wellenartig verlaufen, auch da wäre noch der Reibungsverlust zu ersetzen.

Eine stationäre Circulation zwischen Gebieten verschiedenen Druckes kann man für den Zweck der Energiebetrachtungen nach folgendem Schema eingerichtet denken.



(1) Die Luft fließt unten horizontal vom hohen Druck P_1 zu niedrigem P_2 und nimmt dabei Wärme auf; der Rechnung wegen setzt man statt dessen Zustandsänderung von P_1 zu P_2 adiabatisch, Abkühlung von T_1 zu T_1', dann Wärmezufuhr beim Druck P_2, Temperaturerhöhung von T_1' zu T_2.

(2) Adiabatisches Aufsteigen vom Ort niedrigen Druckes; es wird verticales Gleichgewicht oder ein davon unmerklich verschiedener Zustand angenommen. Der Druck sinkt zu p_2, die Temperatur zu τ_2.

(3) Horizontale Bewegung in der Höhe von p_2 zu p_1, zugleich Abkühlung durch Strahlung oder Leitung; dieser Vorgang wird für die Rechnung zerlegt in adiabatische Zustandsänderung von p_2, τ_2 zu p_1, τ_2', dann Entziehung von Wärme, Abkühlung von τ_1' auf τ_2 beim Druck p_1, derart bemessen, dass

(4) beim adiabatischen Herabsinken die Luft mit der Temperatur T_1 und dem Druck P_1 unten ankommt. Auch hier ist Gleichgewicht zwischen Schwerkraft und verticaler Druckabnahme vorausgesetzt.

Die Temperaturänderung mit der Höhe ist auf beiden Seiten gleich $-g/C_p$ für die Längenheit (C_p für trockene Luft 987 m^2 sec^{-2} Centigrad^{-1}). Die Temperaturdifferenz im gleichen Niveau zwischen beiden Säulen constant Die Druckdifferenz mit der Höhe abnehmend wird in einer gewissen Höhe Null und wächst darüber hinaus mit umgekehrtem Vorzeichen.

Man wählt die Höhe der Luftsäule zweckmäßig derart, dass auch die horizontale Bewegung oben im Sinne des Gefälles stattfindet. Das ist aber nicht wesentlich nothwendig.

Um den Betrag der von den Druckkräften geleisteten Arbeit würde die potentielle Energie abnehmen, wenn keine Wärmezufuhr stattfände. Stationärer Zustand: Die in Arbeit verwandelte Wärmemenge ersetzt jene potentielle Energie, welche durch Bewegung im Sinne des Gefälles in kinetische verwandelt wird; der Zuwachs an kinetischer Energie wird durch Reibung aufgezehrt.

Für je 1 *kg*, welches den Canal durchläuft wird während der Umlaufsdauer

$$\text{Wärme zugeführt}\quad Q = C_p(T_2 - T_1') \ldots\text{bei 2 unten,}$$
$$\text{» entzogen}\quad Q' = C_p(\tau_2' - \tau_1)\ \ldots\text{bei 1 oben,}$$
$$\text{in Arbeit verwandelt}\quad Q - Q' = q = C_p[T_2 - T_1' - (\tau_2' - \tau_1)].$$

Nun hat man

$$\tau_2 = T_2 - \frac{g}{C_p}h, \qquad \tau_1 = T_1 - \frac{g}{C_p}h,$$

damit

$$\text{(IV)}\qquad q = C_p(T_1 - T_1' + \tau_2 - \tau_2') = C_p T_1\left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{R}{C_p}}\right) + C_p\tau_2\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{R}{C_p}}\right).$$

Nach einer Bemerkung in §. 6 ist die von der Druckkraft im stationären Feld auf dem Weg $P_1 P_2$ für je 1 *kg* geleistete Arbeit $C_p(T_1 - T_1')$, ebenso auf dem Weg $p_2 p_1$ $C_p(\tau_2 - \tau_2')$. Auf den Wegstücken $P_2 p_2$ und $p_1 P_1$ gibt es der Voraussetzung nach keine wirksame Kraft, also auch keine Arbeit. Die Wärmemenge q ist äquivalent der ganzen auf den horizontalen Bahnen geleisteten Arbeit.

Die Summe der Entropieänderung in einem Umlauf ist für 1 *kg*

$$\int_{T_1'}^{T_2} \frac{C_p dT}{T} + \int_{\tau_1'}^{\tau_1} \frac{C_p dT}{T} = C_p \lg \frac{T_2 \tau_1}{T_1' \tau_2'} = 0,$$

da man mit der Gleichung für adiabatische Zustandsänderung erhält

$$T_2 \tau_1 = T_1' \tau_2' = T_1 T_2 \left(\frac{p_1}{P_2}\right)^{\frac{R}{C_p}}.$$

Der Kreisprocess ist umkehrbar. Presst man die Luft dem Gefälle entgegen durch, so hat man oben gleich viel Wärme zuzuführen, wie vorher entzogen wurde, unten Wärmeabgabe statt Zufuhr. Die gegen die Druckkraft geleistete Arbeit wird in Wärme verwandelt und die Druckunterschiede bleiben ungeändert.

Der Nutzeffect der im ersten Process zugeführten Wärme ist sehr nahe gleich

$$1 - \frac{\tau_2' + \tau_1}{T_1' + T_2},$$

er wächst mit dem Niveauunterschied der horizontalen Bahnen.

8. Kreisprocess mit geänderter Wärmezufuhr zur Nachahmung des Vorganges in feuchter Luft. In dem Schema lasse man bei P_2 Wasserdampf hinzukommen und das Gemisch von Luft und Dampf so hoch aufsteigen, dass bei p_2 der Dampfgehalt nahezu erschöpft ist. Das in jedem Wegelement von $P_2 p_2$ condensierte Wasser soll gleich ausfallen und bei P_2 gesammelt werden. Hier wird nun während der Circulation für 1 *kg* trockener Luft nicht nur die zur Erwärmung von T_1' auf T_2 nöthige Wärmezufuhr, sondern noch diejenige für die Verdampfung des von jener Luftmasse aufzunehmenden Wassers stattfinden.

Die Condensation bewirkt, dass bei adiabatischer Zustandsänderung auf der Bahn $P_2 p_2$ die verticale Temperaturabnahme kleiner ist als in trockener Luft. Das Verhältnis der Massen von gesättigtem Dampf und Luft im gleichen Volumen ist bei 15° C. nahe 0·01. Vernachlässigt man Größen dieser Ordnung gegen 1, so hat man

$$l\,dx = C_p[(d\tau) - d\tau]$$

[dx die auf dem Bahnstück dz condensierte Masse für je 1 *kg* trockener Luft, $l\,dx$ die zugehörige Verdampfungswärme, $-d\tau$ Temperaturänderung in gesättigt feuchter, $-(d\tau)$ diejenige in trockener Luft].

Die vollständige Behandlung eines Kreisprocesses mit feuchter Luft fordert einen großen Aufwand an Formeln. Man kann aber alles was darin wesentlich ist, mit trockener Luft nachahmen und der Process wird dabei durchsichtiger.

Statt bei P_2 unten die Verdampfungswärme zuzuführen, welche dann auf dem Weg $P_2 p_2$ zur Erwärmung der Luft (d. i. zur Verminderung der verticalen Temperaturabnahme) verbraucht wird, ordnet man längs $P_2 p_2$ abgestufte Wärmequellen an, die bewirken, dass auf dem ganzen Weg eine vorgeschriebene Temperatur herrscht; also dem Wegstück dz die Änderung $-d\tau$ zukommt. Wäre sie bei adiabatischen Bedingungen $-(d\tau)$, so hat man zuzuführen $dQ = C_p\,[(d\tau)-d\tau]$. Es tritt dQ an die Stelle von ldx.

Man fingiert nun folgenden Kreisprocess: (1) Wegstück $P_1 P_2$ und Wärmezufuhr bei P_2 wie zuvor.

(2) Wärmezufuhr auf dem Wege $P_2 p_2$ derart, dass die Temperatur in jeder Höhe einen vorgeschriebenen Wert hat. Gleichgewicht zwischen Schwerkraft und verticaler Druckabnahme.

(3) und (4) wie zuvor.

Aus der Gleichung für die Wärmezufuhr und aus der für die verticale Druckänderung bei Gleichgewicht

$$dQ = C_p dT - \frac{RT}{p}dp, \qquad \frac{RT}{p}\frac{dp}{dz} = -g$$

hat man für (2)

$$\frac{dQ}{dz} = C_p\left(\frac{dT}{dz}+\frac{g}{C_p}\right).$$

Nun ist außer der Wärmemenge $C_p\,(T_2 - T_1')$ bei P_2 noch zuzuführen auf dem Weg $P_2 p_2$

$$C_p\left(\tau_2 - T_2 + \frac{g}{C_p}h\right)$$

und zu entziehen, wie zuvor, bei p_1 $C_p\,(\tau_2' - \tau_1)$.

In Arbeit wird verwandelt

$$q = C_p\left(\tau_2 - T_1' + \frac{g}{C_p}h + \tau_1 - \tau_2'\right)$$

$$= C_p\,(T_1 - T_1' + \tau_2 - \tau_2'). \qquad \text{(IV)}$$

Dieser Ausdruck von gleicher Form und gleicher Bedeutung wie im ersten Process hat aber jetzt einen anderen Wert. Wenn P_1, P_2, T_1, T_2 und h gleich bleiben, die Säule $P_2 p_2$ aber wärmer ist als zuvor, so wird p_2 größer, p_1 bleibt ungeändert, dem größeren Unterschied $p_2 - p_1$ entspricht auch ein größeres $\tau_2 - \tau_2'$. Es wird mehr Wärme als im ersten Fall in Arbeit verwandelt; der Zuwachs wird zur Erhaltung des nun größeren Druckunterschiedes im obern Niveau verbraucht.

Dem folgenden Zahlenbeispiel für den zweiten Process sind zugrunde gelegt:

$$h = 6000\,m; \qquad g = 9\cdot 8\,\frac{m}{\sec^2} \text{ für die mittlere Höhe.}$$

$$\frac{R}{C_p} = \frac{0\cdot 41}{1\cdot 41}, \qquad R = 287\,\frac{m^2}{\sec^2 . C^0}, \qquad C_p = 987\,\frac{m^2}{\sec^2 . C^0} = 0\cdot 2375\,\frac{\text{Calorien}}{kg . C^0}$$

$P_1 = 770\,mm$ Hg	$T_1 = 285°$	$\left(\frac{dT}{dz}\right)_1 = -\frac{g}{C_p} = -0\cdot 009929\,\frac{C^0}{m}$	$\tau_1 = 225\cdot 4°$
$P_2 = 740$	$T_2 = 288°$	$\left(\frac{dT}{dz}\right)_2 = -0\cdot 006$	$\tau_2 = 252\cdot 2°.$

Die verticale Temperaturänderung in der Säule $P_2 p_2$ ist constant angenommen; sie ist nahe gleich dem mittleren Wert in gesättigt feuchter Luft, mit der Temperatur von 15° C. am Boden.

Man berechnet mit der für lineare verticale Temperaturabnahme giltigen Gleichung

$$\frac{p}{P} = \left(\frac{\tau}{T}\right)^{-gR\frac{dT}{dz}} \ldots, \qquad p_1 = 343 \cdot 62, \qquad p_2 = 345 \cdot 92 \; mm \text{ Hg},$$

ferner mit der Gleichung für die adiabatische Zustandsänderung

$$\frac{T}{T'} = \left(\frac{P}{P'}\right)^{\frac{R}{C_p}} \ldots T_1' = 281 \cdot 73^\circ, \qquad \tau_2' = 251 \cdot 51^\circ.$$

Die auf dem verticalen Weg $P_2 p_2$ einem Kilogramm Luft zuzuführende Wärmemenge ist $C_p . 23 \cdot 6 = 5 \cdot 6$ Cal. [Gesättigte Luft bei 15° C. und 740 *mm* Druck enthält für 1 *kg* trocken 0·01086 *kg* Dampf; die Verdampfungswärme, zu 595 angenommen, hätte man dafür 6·46 Cal. zu leisten].

Die einem Kilogramm während eines Umlaufes zugeführte Wärme ist $C_p\, 29 \cdot 87 = 7 \cdot 09$ Cal.
» » » » » » entzogene » » $C_p\, 26 \cdot 11 = 6 \cdot 20$ »
In Arbeit verwandelt . . . . $C_p\; 3 \cdot 76 = 0 \cdot 89$ »

$$\text{Nutzeffect der zugeführten Wärme } \frac{3 \cdot 76}{29 \cdot 87} = 0 \cdot 126.$$

Zum Vergleich wird noch ein Beispiel für den ersten Process angeführt: h, P_1, P_2, T_2 sind ungeändert, T_1 wird so gewählt, dass der mittlere Temperaturunterschied der verticalen Bahnen nahe den gleichen Wert hat wie oben 15°.

$h = 6000\; m$				Berechnet	
$P_1 = 770\; mm$ Hg	$T_1 = 273°$	$\left(\frac{dT}{dz}\right)_1 = -\frac{g}{C_p}$	$\tau_1 = 213 \cdot 4$	$p_1 = 330 \cdot 07\; mm$ Hg	$T_1' = 269°87$
$P_2 = 740$	$T_2 = 288°$	$\left(\frac{dT}{dz}\right)_2 = -\frac{g}{C_p}$	$\tau_2 = 228 \cdot 4$	$p_2 = 333 \cdot 38$	$\tau_2' = 227 \cdot 74$

Zugeführte Wärmemenge für 1 *kg* $C_p . 18 \cdot 13 = 4 \cdot 31$ Cal.
Entzogene » » 1 *kg* $C_p . 14 \cdot 34 = 3 \cdot 41$ »

In Arbeit verwandelt 0·90 Cal.

$$\text{Nutzeffect } \frac{3 \cdot 79}{18 \cdot 13} = 0 \cdot 21.$$

In beiden Processen wird bei gleichem Temperaturunterschied der Luftsäulen nahe gleich viel Wärme in Arbeit verwandelt; der Nutzeffect ist im zweiten Beispiele größer als im ersten.

Die in der Zeiteinheit in Arbeit verwandelte Wärmemenge ist nq/ϑ, wenn n einen vom Querschnitt des Canals bestimmten Factor und ϑ die Umlaufsdauer bezeichnet. ϑ wächst unter sonst gleichen Umständen mit der Länge der Bahn, q ist davon unabhängig. Zur Erhaltung gleicher Druckunterschiede bei größerer Bahnlänge wird man weniger Wärme aufzuwenden haben.

9. Das Schema war einst sehr beliebt, als man annahm, dass die Anticyklonen des Winters kalt seien. Jetzt gilt es für veraltet, seit Hann nachgewiesen hat, dass dies nur für die unterste windstille Schicht gilt, die höheren Lagen dagegen sehr warm sind.

Die Luftsäule in einem Hochdruckgebiet soll nicht nur eine für die Jahreszeit hohe Temperatur haben, sondern auch eine höhere als irgend eine im Umkreis von niedrigerem Druck. Im unteren Theile fließt beständig Luft ab im Sinne des Gefälles; dabei bleibt die Anticyklone stationär, hält sich manchmal wochenlang. Man muss also Zufluss in den oberen Schichten annehmen.

Der Zufluss kann bei dieser Voraussetzung nur dem Gefälle entgegen stattfinden. Die Druckunterschiede verschwinden nicht mit der Erhebung, sondern sie werden im oberen Niveau relativ größer, wenn die ganze Säule im Hochdruckgebiet wärmer ist als ringsum. Will man hier eine Circulation annehmen, so kann dabei nicht Wärme in Arbeit umgesetzt werden. Unten leisten die Druckkräfte Arbeit, oben muss man für den Zufluss Arbeit aufwenden, mehr als man unten gewinnt. Das System könnte sich demnach nicht auf ähnliche Art wie das vorher betrachtete halten, sondern zunächst aus einem Vorrath lebendiger Kraft, der den Zufluss in der Höhe speist. Diese kinetische Energie kann, wie alle Bewegung auf der Erde, nur aus Wärme entstanden sein; um eine Vorstellung von dem ganzen Vorgang zu haben, müsste man den Zustand eines größeren Gebietes überblicken und danach wieder ein Schema mit Verwandlung von Wärme in Arbeit ersinnen. [Vergl. Ekholm, Meteor. Ztsch. 1891, S. 366.]

III. Reibung.

10. Der analytischen Behandlung großer Luftströmungen stellen sich viele Hindernisse entgegen; eines davon ist die Schwierigkeit, den Einfluss der Reibung auf zweckmäßige Art in die Bewegungsgleichungen einzuführen. Er ist sicher sehr groß; die ungleichen Erwärmungen der Luft erzeugen immer neue Druckunterschiede und Bewegungen, eine beständige Zunahme der mechanischen Energie findet aber nicht statt. Es wird demnach in großen Zeitabschnitten der ganze Zuwachs durch Reibung verzehrt. Auch aus den Bewegungen einer einzelnen Luftmasse kann man ein Argument dafür holen. Nahe am Boden findet man in den weitaus zahlreichsten Fällen eine Windcomponente in der Richtung des Druckgefälles; die Bewegung wird demnach beschleunigt. Dasselbe oder Bewegung senkrecht zur resultierenden Kraft findet auch in der Höhe statt, mindestens hat bisher die Discussion der Ballonfahrten Winde gegen das Gefälle nicht festgestellt. Es ist kaum zu bezweifeln, dass solche vorkommen, doch scheinen sie nicht sehr häufig zu sein. Eine andere Ursache der Geschwindigkeitsminderung gibt es nicht als Bewegung gegen die wirkende Kraft und Reibung. Wenn nun die erste sehr selten vorkommt, so muss zumeist die Reibung eine beständige Beschleunigung der bewegten Luftmasse hindern.

Doch ist der Einfluss der inneren Reibung der Luft auf Strömungen in großen Räumen sicher sehr klein. Helmholtz hat das mehrmals und auf verschiedene Arten gezeigt. Es ist vielleicht nicht überflüssig, den Energieverlust durch innere Reibung zu schätzen nach der von Stokes abgeleiteten Gleichung

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \varkappa \int dk \left\{ 2\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|^2 \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right\}.$$

Sie gibt die in der Zeiteinheit im Raume k durch Reibung verbrauchte Energiemenge.

Darin ist die Reibungsconstante der Luft zu Schätzungszwecken ausreichend

$$\varkappa = 0\cdot 00002\, kg.\, m^{-1}.\, \mathrm{sec}^{-1}$$

zu setzen. Um eine Bewegung mit sehr großem Betrag der inneren Reibung zu erhalten oder um diesen Betrag stark zu überschätzen, wird angenommen, dass jede Geschwindigkeitscomponente nach jeder der drei Axenrichtungen um 10 *m/sec* für 1 *km* Entfernung wächst oder abnimmt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \ldots\ldots = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{10\, m.\, \mathrm{sec}^{-1}}{1000\, m}, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 = \ldots\ldots = 0\cdot 0001\ \mathrm{sec}^{-2}$$

und überdies wird das negative Glied mit dem Factor 2/3 weggelassen.

Es bleibt

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \varkappa . k . 0 \cdot 0018.$$

Für die Luftsäule über einem Quadratmeter, deren Höhe wieder zum Zwecke der Überschätzung zu 100000 m, deren Volumen $10^5 m^3$ angenommen ist, hat man danach

$$\frac{\partial K}{\partial t} = (2 . 10^{-5}) . (10^5) . (18 . 10^{-4}) = 36 . 10^{-4} \frac{kg\ m^2}{\sec^3}.$$

Da in denselben Einheiten die Arbeit von 1 Kilogramm-Meter 9·8 ist, so braucht es mindestens

$$\frac{9 \cdot 8}{0 \cdot 0036} \sec \text{ oder } 7 \cdot 6 \text{ Stunden,}$$

um die einem Kilogramm-Meter äquivalente kinetische Energie in der Luftsäule über einem Quadratmeter durch innere Reibung verschwinden zu lassen.

Die kinetische Energie dieser Luftsäule ist bei einer Geschwindigkeit von 10 m/sec gleich $8000 . 1 \cdot 293 . 50\, kg\, m^2 \sec^{-2}$, mehr als 50000 Kilogramm-Metern äquivalent; man sieht, dass die lebendige Kraft ein sehr langes Leben hätte, wenn sie nur durch die innere Reibung, wie sie in geregelten Strömungen wirksam ist, verzehrt werden sollte.

11. Es müssen andere, viel stärkere Bewegungshindernisse da sein. Rauheit der Unterlage, Unregelmäßigkeit der Bewegung, also die vielen kleinen Wirbel, welche in den großen Strömen entstehen und verschwinden, auch Discontinuitätsflächen sind in Betracht gezogen worden. Vielleicht genügt schon die erste Ursache, und der Energieverlust mag nicht eigentlich durch äußere Reibung, sondern durch stoßweise Übertragung der Energie der untersten Luftschicht an feste und flüssige Körper erfolgen. Solange die Druckunterschiede bestehen bleiben, wird jene Luftschicht immer wieder beschleunigt und die Energie dazu von den höheren Schichten geliefert.

Wenn nun dem ganzen System keine Energie von außen zugeführt, dagegen der n-te Theil des Vorraths E in der Zeiteinheit entzogen wird [durch Wellenerregung oder Staubaufwirbeln, Erschütterung der Halme, Bäume, Häuser u. s. f.], so hat man

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{E}{n}, \qquad E = E_0 e^{-\frac{t}{n}}.$$

Die Zeit, in der die Energie auf $^1/_4$ sinkt, die Geschwindigkeiten auf den halben Anfangswert, ist

$$t = -n \lg \frac{1}{4} = \frac{n \operatorname{Log} 4}{\operatorname{Log} e} = 1 \cdot 386\, n.$$

Wenn $n = 10^5$, der hunderttausendste Theil der vorhandenen Energie in der Secunde verbraucht wird sinkt die Geschwindigkeit auf die Hälfte in 138600 Secunden oder 38·5 Stunden. Das kann für erlöschende Cyklonen der Größenordnung nach ziemlich richtig sein. (Es handelt sich um eine grobe Schätzung.)

Die Luftmasse der untersten Acht-Meterschicht ist $^1/_{1000}$ der ganzen Masse. Nimmt man ihre durchschnittliche Geschwindigkeit beiläufig zu $^1/_3$, ihre Energie zu $^1/_{10}$ der gleichen Luftmasse in der Höhe, so hat diese niedrigste Schicht $^1/_{10000}$ der Gesammtenergie. Wird davon der zehnte Theil in der Secunde an die festen Hindernisse, die aus dem Boden aufragen oder zur Erregung der Meereswellen abgegeben, so genügt das, um einer Cyklone in 38 Stunden drei Viertel ihrer anfänglichen Energie zu entziehen. Mögen daneben noch andere Bewegungshemmungen wirksam sein, so ist doch wahrscheinlich, dass sie alle zusammen keinen so großen Energieverlust verursachen, wie die Pseudoreibung der untersten Schicht.

